深入理解B样条曲线（上）

https://zhuanlan.zhihu.com/p/144042470

None Mon Sep, 28 01:08

计算机中绘制曲线，通过贝塞尔曲线已经满足了我们大部分需求，但是其存在某些缺点，比如移动某一个控制点会导致整个曲线发生变化，即无法局部控制曲线的走向。所以 B 样条曲线(B-Spline)为了解决贝塞尔曲线的缺陷应运而生。

> 不了解贝塞尔曲线的同学，可以去看我以前写的另外一篇文章《深入理解贝塞尔曲线》，后面的内容会假设你已经了解并掌握贝塞尔曲线的相关内容。

什么是 B 样条曲线?

解释 B 样条曲线之前，首先要解释一下什么是样条。样条是通过一组指定点集而生成平滑曲线的柔性带。 简单地说，B 样条曲线就是通过控制点局部控制形状的曲线。不太理解的同学可以通过本文底部的 demo 查看 B 样条曲线中，控制点对曲线绘制的影响。

B 样条曲线比贝塞尔曲线的设计要复杂许多，我们先通过他们的公式大致比较一下贝塞尔曲线与 B 样条曲线的区别：

贝塞尔曲线:

$$\overrightarrow{P(t)}=\sum_{i=0}^{n-1}\overrightarrow{p_i}B_{i,n}(t),t\in[0,1]$$

B 样条曲线:

$$\overrightarrow{P(t)}=\sum_{i=0}^{n-1}\overrightarrow{p_i}B_{i,d}(t),\ \square\ \square\ t_{min}\leq t\leq t_{max},2\leq d\leq n$$

先简单介绍一下上述公式的组成：

仔细观察这两个公式，我们可以看到以下的相同点：

- 都是求和公式。
- 都有一个

  $$B_{i,x}(_t)$$

  的多项式系数（式中贝塞尔曲线 x=n，B 样条曲线 x=d）。

可以看出有以下几个不同点：

计算多项式

公式中其他值其实都比较清晰，问题的关键是需要搞清楚那个多项式$B_{i,n}(t)$是什么！

计算这个多项式，我们使用到了Cox-deBoor 递归公式，公式内容如下（需要注意一点，如果遇到**分母为 0**的情况时，需要特殊处理为整体值为 0）：

$$B_{k,1}(u) = \begin{cases} 1, & u_k \leq u \leq u_{k+1} \\ \\ 0, & \square\square \end{cases}$$

$$B_{k,d}(u) = \frac{u - u_k}{u_{k+d-1} - u_k} B_{k,d-1}(u) + \frac{u_{k+d} - u}{u_{k+d} - u_{k+1}} B_{k+1,d-1}(u)$$

从这个公式可以看出，递归公式的差异主要体现在

$$u_k$$

和

$$u_{k+1}$$

的取值上。需要注意的是**节点的数量**是由参数

$$d$$

和

$$n$$

决定的，数量等于

$$n + d$$

。根据这些节点u的取值，可以划分为一下三种类型：

- 均匀周期性(uniform)
- 开放均匀性(open uniform)
- 非均匀性(non-uniform)

想必大家现在已经非常头晕了吧，这都什么乱七八糟的，全是公式，完全看不懂啊！如果想讲清楚 B 样条曲线是非常困难的，因为其种类繁多，参数控制也非常自由。所以我还是通过讲解计算过程的栗子 来让大家更好地理解吧！

种类一：均匀周期性 B 样条曲线

顾名思义，均匀周期性 B 样条曲线，就是节点

$$u$$

取值是均匀的，比如`[-1, -0.5, 0, 0.5, 1]`，只要每个相邻的值间隔是相同的就可以了。不过为了方便计算，一般取值都是从 0 开始，并且间隔为 1。比如
`[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]`。

均匀取节点值会导致每个多项式函数是**周期性**分布的，下面我会通过一个均匀二次 B 样条的计算过程，帮助大家理解这个*周期性*。

1.确定公式参数

因为是二次 B 样条曲线，所以我们可以确定以下参数：

确定这几个值后，我们就可以开始计算多项式 B 的值了。下面是迭代公式：

$$B_{k,1}(u)=\begin{cases}1, & u_k\le u\le u_{k+1}\\ \\ 0, & \text{□□}\end{cases}\qquad \cdots\cdots(\text{□□}1)$$

$$B_{k,d}(u)=\frac{u-u_k}{u_{k+d-1}-u_k}B_{k,d-1}(u)+\frac{u_{k+d}-u}{u_{k+d}-u_{k+1}}B_{k+1,d-1}(u)\cdots\cdots(\text{□□}2)$$

2.计算常量值的多项式

首先根据上面的公式 *1*，我们可以先得出常量值的多项式

$$B_{0,1}(u)$$

、

$$B_{1,1}(u)$$

、

$$B_{2,1}(u)$$

、

$$B_{3,1}(u)$$

：

- $$k=0,d=1$$

  时：

$$B_{0,1}(u)=\begin{cases}1, & 0\le u\le 1(\text{□}\ u_0\le u\le u_1)\\ \\ 0, & \text{□ □}\end{cases}$$

- $$k=1,d=1$$

  时:

$$B_{1,1}(u)=\begin{cases}1, & 1\le u\le 2(\text{□}\ u_1\le u\le u_2)\\ \\ 0, & \text{□ □}\end{cases}$$

- $$k=2,d=1$$

  时:

$$B_{2,1}(u)=\begin{cases}1, & 2\le u\le 3(\text{□}\ u_2\le u\le u_3)\\ \\ 0, & \text{□ □}\end{cases}$$

- $$k=3,d=1$$

  时:

$$B_{3,1}(u)=\begin{cases}1, & 3\le u\le 4(\text{□}\ u_3\le u\le u_4)\\ \\ 0, & \text{□ □}\end{cases}$$

因为 B 样条曲线公式为:

$$\begin{gathered}\overrightarrow{P(t)}=\sum_{i=0}^{n-1}\overrightarrow{p_i}B_{i,d}(t)\\ \text{□}\ n=4\text{□}\ d=3\text{□ □ □ □}\\ =\overrightarrow{p_0}B_{0,3}(t)+\overrightarrow{p_1}B_{1,3}(t)+\overrightarrow{p_2}B_{2,3}(t)+\overrightarrow{p_3}B_{3,3}(t)\end{gathered}$$

从上式可以很轻松地看出，我们需要知道以下几个多项式的函数:

所以我们现在依次求解这些多项式的函数。

3.计算非常量的多项式

求

$$B_{0,3}(t)$$

的值（即

$$k=0,d=3$$

）：

$$\begin{aligned}B_{0,3}(u)&=\frac{u-u_0}{u_2-u_0}B_{0,2}(u)+\frac{u_3-u}{u_3-u_1}B_{1,2}(u)\\&=\frac{u}{2}B_{0,2}(u)+\frac{3-u}{3-1}B_{1,2}(u)\\&=\frac{1}{2}uB_{0,2}(u)+\frac{1}{2}(3-u)B_{1,2}(u)\end{aligned}$$

从上式中得出，我们需要得到

$$B_{0,2}(u)$$

和

$$B_{1,2}(u)$$

的值。

求

$$B_{0,2}(t)$$

的值（即

$$k=0,d=2$$

）：

$$\begin{aligned}B_{0,2}(u)&=\frac{u-u_0}{u_1-u_0}B_{0,1}(u)+\frac{u_2-u}{u_2-u_1}B_{1,1}(u)\\&=\frac{u}{1}B_{0,1}(u)+\frac{2-u}{1}B_{1,1}(u)\\&=uB_{0,1}(u)+(2-u)B_{1,1}(u)\\&\square\ B_{0,1}\square\ B_{1,1}\square\ \square\ \square\ \square\ \square\\&=\begin{cases}u, & 0\le u\le 1\\ 2-u, & 1\le u\le 2\\ 0, & \square\ \square\end{cases}\end{aligned}$$

求

$$B_{1,2}(t)$$

的值（即

$$k=1,d=2$$

）：

$$\begin{aligned}
B_{1,2}(u) &= \frac{u-u_1}{u_2-u_1}B_{1,1}(u)+\frac{u_3-u}{u_3-u_2}B_{2,1}(u) \\
&= \frac{u-1}{2-1}B_{1,1}(u)+\frac{3-u}{3-2}B_{2,1}(u) \\
&= (u-1)B_{1,1}(u)+(3-u)B_{2,1}(u) \\
&\text{□ } B_{1,1}\text{□ } B_{2,1}\text{□ □ □ □ □} \\
&= \begin{cases} u-1, & 1 \le u \le 2 \\ 3-u, & 2 \le u \le 3 \\ 0, & \text{□ □} \end{cases}
\end{aligned}$$

得出

$$B_{0,3}(u)$$

继续迭代，我们就可以得出

$$B_{0,3}(u)$$

了:

$$\begin{aligned}
B_{0,3}(u) &= \frac{1}{2}uB_{0,2}(u)+\frac{1}{2}(3-u)B_{1,2}(u) \\
&\text{□ □ □ □ } B_{0,2}\text{□ } B_{1,2}\text{□ □} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}u^2, & 0 \le u \le 1 \\ \frac{1}{2}u(2-u)+\frac{1}{2}(3-u)(u-1), & 1 \le u \le 2 \\ \frac{1}{2}(3-u)^2, & 2 \le u \le 3 \\ 0, & \text{□ □} \end{cases}
\end{aligned}$$

求

$$B_{1,3}(t)$$

,

$$B_{2,3}(t)$$

,

$$B_{3,3}(t)$$

的值

这三个多项式的求解过程与

$$B_{0,3}(t)$$

一致，有兴趣的小伙伴可以自己计算一下，加深理解。这里我仅给出最后的结果。

$$B_{1,3}(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(u-1)^2, & 1\leq u\leq 2\\ \frac{1}{2}(u-1)(3-u)+\frac{1}{2}(4-u)(u-2), & 2\leq u\leq 3\\ \frac{1}{2}(4-u)^2, & 3\leq u\leq 4\\ 0, & \text{□□}\end{cases}$$

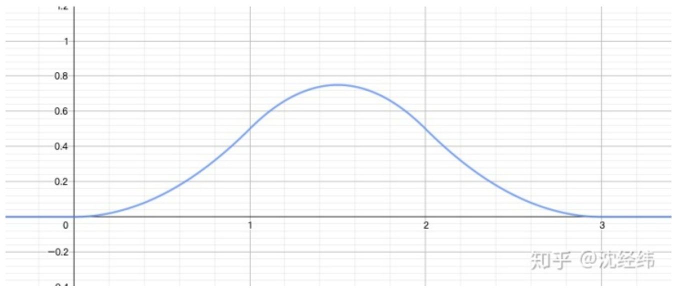
$$B_{2,3}(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(u-2)^2, & 2\leq u\leq 3\\ \frac{1}{2}(u-2)(4-u)+\frac{1}{2}(5-u)(u-3), & 3\leq u\leq 4\\ \frac{1}{2}(5-u)^2, & 4\leq u\leq 5\\ 0, & \text{□□}\end{cases}$$

$$B_{3,3}(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(u-3)^2, & 3\leq u\leq 4\\ \frac{1}{2}(u-3)(5-u)+\frac{1}{2}(5-u)(u-3), & 4\leq u\leq 5\\ \frac{1}{2}(6-u)^2, & 5\leq u\leq 6\\ 0, & \text{□□}\end{cases}$$

将四个函数分别绘制到坐标系中，大家就可以看到图像形状是完全相同的，只是在 x 轴方向做了平移，如下图所示。

$$B_{0,3}(u)$$

:

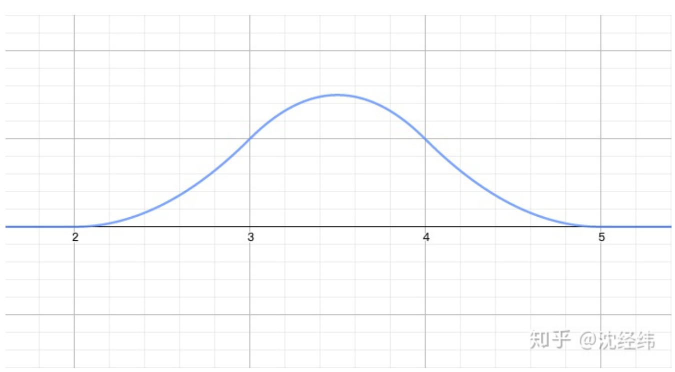


$$B_{1,3}(u)$$

:

$$B_{2,3}(u)$$

:



$$B_{3,3}(u)$$

:

4.确定曲线方程。

之前已经计算出了曲线的方程式，如下：

$$\overrightarrow{P(t)} = \overrightarrow{p_0}B_{0,3}(t) + \overrightarrow{p_1}B_{1,3}(t) + \overrightarrow{p_2}B_{2,3}(t) + \overrightarrow{p_3}B_{3,3}(t)$$

将上面的多项式带入到方程，就可以得到最终的曲线方程。然后将 t 从 0 取至 6，获得的点集就是我们想要的均匀周期性 B 样条曲线。

从多项式的取值，我们就可以看出 B 样条曲线的一个特点，就是控制点不会影响整个曲线的绘制，只是局部影响曲线的走向。

最后

我写了一个线上的[demo]，用于展示均匀周期性 B 样条曲线的绘制，有兴趣的同学可以去看一下。

> 需要注意一下，demo中的均匀3阶B样条曲线t的取值是去除了前后各两个整数值（对于上面例子就是t取值改为2到4）。

下篇我将会介绍剩下两种 B 样条曲线的绘制过程，敬请期待！