IEEE754 浮点数的表示方法_Dablelv的博客专栏-CSDN博客_ieee754

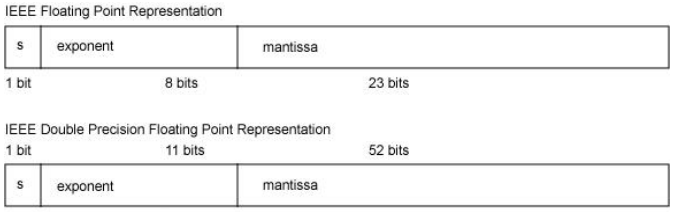
https://blog.csdn.net/K346K346/article/details/50487127

None Tue Mar, 16 19:37

浮点数（Floating-point Number）是对实数的一种近似表示，由一个有效数字（即尾数）加上幂数来表示，通常是乘以某个基数的整数次幂得到。以这种表示法表示的数值，称为浮点数。表示方法类似于基数为10的科学计数法。利用浮点进行运算，称为浮点计算，这种运算通常伴随着因为无法精确表示而进行的近似或舍入。

计算机对浮点数的表示规范遵循电气和电子工程师协会（IEEE）推出的 IEEE754 标准，浮点数在 C/C++ 中对应 float 和 double 类型，我们有必要知道浮点数在计算机中实际存储的内容。

IEEE754 标准中规定 float 单精度浮点数在机器中表示用 1 位表示数字的符号，用 8 位表示指数，用 23 位表示尾数，即小数部分。对于 double 双精度浮点数，用 1 位表示符号，用 11 位表示指数，52 位表示尾数，其中指数域称为阶码。IEEE754 浮点数的格式如下图所示。



注意，IEE754 规定浮点数阶码 E 采用'**指数 e 的移码-1**'来表示，请记住这一点。为什么指数移码要减去 1，这是 IEEE754 对阶码的特殊要求，以满足特殊情况，比如对正无穷的表示。

移码（又叫增码）是对真值补码的符号位取反，一般用作浮点数的阶码，引入的目的是便于浮点数运算时的对阶操作。

对于定点整数，计算机一般采用补码的来存储。正整数的符号位为 0，反码和补码等同于原码。负整数符号位为1，原码、反码和补码的表示都不相同，由原码变成反码和补码有如下规则：

（1）原码符号位为1不变，整数的每一位二进制数位求反得反码；

（2）反码符号位为1不变，反码数值位最低位加1得补码。

比如，以一个字节 8bits 来表示 -3，那么 [− 3] 原 = 10000011 [-3]_原=10000011 [−3]原=10000011，[− 3] 反 = 11111100 [-3]_反=11111100 [−3]反=11111100，[− 3] 补 = 11111101 [-3]_补=11111101 [−3]补=11111101，那么 -3 的移码就是 [− 3] 移 = 01111101 [-3]_移=01111101 [−3]移=01111101。

如何将移码转换为真值 -3 呢？先将移码转换为补码，再求值。

若不对浮点数的表示作出明确的规定，同一个浮点数的表示就不是唯一的。例如 (1.75) 10 (1.75)_{10} (1.75)10可以表示成 1.11 × 2 0 1.11\times 2^0 1.11×20， 0.111 × 2 1 0.111\times2^1 0.111×21， 0.0111 × 2 2 0.0111\times2^2 0.0111×22等多种形式。当尾数不为0时，**尾数域的最高有效位为1**，这称为浮点数的规格化。否则，以修改阶码同时左右移动小数点位置的办法，使其成为规格化数的形式。

3.1 单精度浮点数真值

IEEE754 标准中，一个规格化的 32 位浮点数 x 的真值表示为：
x = (− 1) S × (1. M) × 2 e x=(-1)^S\times(1.M)\times2^e x=(−1)S×(1.M)×2e
e = E − 127 e=E-127 e=E−127
其中尾数域值是1.M。因为规格化的浮点数的尾数域最左位总是1，故这一位不予存储，而认为隐藏在小数点的左边。

在计算指数 e 时，对阶码E的计算采用原码的计算方式，因此 32 位浮点数的 8bits 的阶码 E 的取值范围是 0 到 255。其中当E为全 0 或者全 1 时，是 IEEE754 规定的特殊情况，下文会另外说明。

3.2 双精度浮点数真值

64 位的浮点数中符号为 1 位，阶码域为 11 位，尾数域为 52 位，指数偏移值是 1023。因此规格化的 64 位浮点数 x 的真值是：
x = (− 1) S × (1. M) × 2 e x=(-1)^S\times(1.M)\times2^e x=(−1)S×(1.M)×2e
e = E − 1023 e=E-1023 e=E−1023

4.1 十进制到机器码

（1）0.5
0.5 = (0.1) 2 0.5=(0.1)_2 0.5=(0.1)2，符号位S为0，指数为 e = − 1 e=-1 e=−1，规格化后尾数为 1.0。

单精度浮点数尾数域共23位，右侧以0补全，尾数域：
M = [000 0000 0000 0000 0000 0000] 2 M=[000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000]_2
M=[000 0000 0000 0000 0000 0000]2

阶码E:
E = [− 1] 移 − 1 = [0111 1111] 2 − 1 = [0111 1110] 2 E=[-1]_移-1=[0111\ 1111]_2-1=[0111\ 1110]_2 E=[−1]移−1=[0111 1111]2−1=[0111 1110]2

对照单精度浮点数的存储格式，将符号位S，阶码E和尾数域M存放到指定位置，得0.5的机器码：
0.5 = [0011 1111 0000 0000 0000 0000 0000 0000] 2 0.5=[0011\ 1111\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000]_2 0.5=[0011 1111 0000 0000 0000 0000 0000 0000]2。

十六进制表示为0.5=0x3f000000。

（2）1.5
1.5 = [1.1] 2 1.5=[1.1]_2 1.5=[1.1]2，符号位为0，指数 e = 0 e=0 e=0，规格化后尾数为1.1。

尾数域M右侧以0补全，得尾数域:
M = [100 0000 0000 0000 0000 0000] 2 M=[100\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000]_2 M=[100 0000 0000 0000 0000 0000]2

阶码E:
E = [0] 移 − 1 = [10000000] 2 − 1 = [01111111] 2 E=[0]_移-1=[1000 0000]_2-1=[0111 1111]_2 E=[0]移−1=[10000000]2−1=[01111111]2

得1.5的机器码:
1.5 = [0011 1111 1100 0000 0000 0000 0000 0000] 2 1.5=[0011\ 1111\ 1100\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000]_2 1.5=[0011 1111 1100 0000 0000 0000 0000 0000]2

十六进制表示为1.5=0x3fc00000。

（3）-12.5
− 12.5 = [− 1100.1] 2 -12.5=[-1100.1]_2 −12.5=[−1100.1]2，符号位S为1，指数e为3，规格化后尾数为1.1001，

尾数域M右侧以0补全，得尾数域:
M = [100 1000 0000 0000 0000 0000] 2 M=[100\ 1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000]_2 M=[100 1000 0000 0000 0000 0000]2

阶码E:
E = [3] 移 − 1 = [1000 0011] 2 − 1 = [1000 0010] 2 E=[3]_移-1=[1000\ 0011]_2-1=[1000\ 0010]_2 E=[3]移−1=[1000 0011]2−1=[1000 0010]2

即-12.5的机器码:
− 12.5 = [1100 0001 0100 1000 0000 0000 0000 0000] 2 -12.5=[1100\ 0001\ 0100\ 1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000]_2 −12.5=[1100 0001 0100 1000 0000 0000 0000 0000]2

十六进制表示为-12.5=0xc1480000。

用如下程序验证上面的推算，代码编译运行平台Win32+VC++ 2012：

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {
	float a=0.5;
	float b=1.5;
	float c=-12.5;

	unsigned int* pa=NULL;
	pa=(unsigned int*)&a;
	unsigned int* pb=NULL;
	pb=(unsigned int*)&b;
	unsigned int* pc=NULL;
	pc=(unsigned int*)&c;

	cout<<hex<<'a=0x'<<*pa<<endl;
	cout<<hex<<'b=0x'<<*pb<<endl;
	cout<<hex<<'c=0x'<<*pc<<endl;

	return 0;
}
```

输出结果：

```
a=0x3f000000
b=0x3fc00000
c=0xc1480000
```

验证正确。

4.2 机器码到十进制

（1）若浮点数 x 的 IEEE754 标准存储格式为 0x41360000，那么其浮点数的十进制数值的推演过程如下：

0 x 41360000 = [0　10000010　011　0110　0000　0000　0000　0000] 0x41360000=[0\ 10000010\ 011\ 0110\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000] 0x41360000=[0 10000010 011 0110 0000 0000 0000 0000]

根据该浮点数的机器码得到符号位 `S=0` ，指数 `e=阶码-127=1000 0010-127=130-127=3` 。

注意，根据阶码求指数时，可以像上面直接通过'阶码-127'求得指数e，也可以将 阶 码 + 1 = 移 码 阶码+1=移码 阶码+1=移码，再通过移码求其真值便是指数 e。比如上面阶码 10000010 + 1 = 1000001 1 [移 码] = > 0000001 1 [补] = 3 (指 数 e) 10000010+1=10000011_{[移码]} =>00000011_{[补]}=3(指数e) 10000010+1=10000011[移码]=>00000011[补]=3(指数e)。

包括尾数域最左边的隐藏位1，那么尾数 1.M=1.011 0110 0000 0000 0000 0000=1.011011。

于是有：
x = (− 1) S × 1. M × 2 e = + (1.011011) × 2 3 = + 1011.011 = (11.375) 10
x=(-1)^S\times1.M\times2^e=+(1.011011)\times2^3=+1011.011=(11.375)_{10}
x=(−1)S×1.M×2e=+(1.011011)×23=+1011.011=(11.375)10

通过代码同样可以验证上面的推算：

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {
        unsigned int hex=0x41360000;
        float* fp=(float*)&hex;
        cout<<'x='<<*fp<<endl;
        return 0;
}
```

输出结果：

```
x=11.375
```

验证正确。

（1）0 的表示
对于阶码为 0 或 255 的情况，IEEE754 标准有特别的规定：
如果 阶码 E=0 并且尾数 M 是 0，则这个数的真值为 ±0（正负号和数符位有关）。

因此 +0 的机器码为：0 00000000 000 0000 0000 0000 0000 0000。
-0 的机器码为：1 00000000 000 0000 0000 0000 0000 0000。

需要注意一点，浮点数不能精确表示 0，而是以很小的数来近似表示 0，因为浮点数的真值等于（以32bits单精度浮点数为例）：
x = (− 1) S × (1. M) × 2 e x=(-1)^S\times(1.M)\times2^e x=(−1)S×(1.M)×2e
e = E − 127 e=E-127 e=E−127
那么 +0 的机器码对应的真值为 1.0 × 2 − 127 1.0\times2^{-127} 1.0×2−127。同理，-0 机器码真值为 − 1.0 × 2 − 127 -1.0\times2^{-127} −1.0×2−127。

（2） + ∞ +\infty +∞ 和 − ∞ -\infty −∞ 的表示
如果阶码 E=255 并且尾数 M 全是0，则这个数的真值为 ±∞（同样和符号位有关）。因此 + ∞ +\infty +∞的机器码为：0 11111111 000 0000 0000 0000 0000 0000。 − ∞ -\infty −∞的机器吗为：1 11111111 000 0000 0000 0000 0000 0000。

（3）NaN（Not a Number）
如果 E = 255 并且 M 不是0，则这不是一个数（NaN）。

6.1 浮点数的数值范围

根据上面的探讨，浮点数可以表示-∞到+∞，这只是一种特殊情况，显然不是我们想要的数值范围。

以 32 位单精度浮点数为例，阶码 E 由 8 位表示，取值范围为 0-255，去除 0 和 255 这两种特殊情况，那么指数 e 的取值范围就是 1-127=-126 到 254-127=127。

（1）最大正数
因此单精度浮点数最大正数值的符号位S=0，阶码E=254，指数e=254-127=127，尾数M=111 1111 1111 1111 1111 1111，其机器码为：0 11111110 111 1111 1111 1111 1111 1111。

那么最大正数值:
$PosMax = (-1)^S \times 1.M \times 2^e = +(1.11111111111111111111111) \times 2^{127} \approx 3.402823e+38$ PosMax=(-1)^S\times1.M\times2^e=+(1.111 1111 1111 1111 1111 1111)\times2^{127}\approx3.402823e+38 PosMax=(−1)S×1.M×2e=+(1.11111111111111111111111)×2127≈3.402823e+38
这是一个很大的数。

（2）最小正数
最小正数符号位S=0，阶码E=1，指数e=1-127=-126，尾数M=0，其机器码为0 00000001 000 0000 0000 0000 0000 0000。

那么最小正数为:
$PosMin = (-1)^S \times 1.M \times 2^e = +(1.0) \times 2^{-126} \approx 1.175494e-38$
PosMin=(-1)^S\times1.M\times2^e=+(1.0)\times2^{-126} \approx1.175494e-38
PosMin=(−1)S×1.M×2e=+(1.0)×2−126≈1.175494e−38

这是一个相当小的数。几乎可以近似等于0。当阶码E=0，指数为-127时，IEEE754就是这么规定 1.0×2^{-127} 1.0\times2^{-127} 1.0×2−127近似为0的，事实上，它并不等于0。

（3）最大负数
最大负数符号位S=1，阶码E=1，指数e=1-127==-126，尾数M=0，机器码与最小正数的符号位相反，其他均相同，为：1 00000001 000 0000 0000 0000 0000 0000。

最大负数等于:
$NegMax=(-1)^S\times1.M\times2^e=-(1.0)\times2^{-126} \approx -1.175494e-38$
$NegMax=(-1)S\times1.M\times2e=-(1.0)\times2-126\approx-1.175494e-38$

（4）最小负数
符号位S=0，阶码E=254，指数e=254-127=127，尾数M=111 1111 1111 1111 1111 1111，其机器码为：1 11111110 111 1111 1111 1111 1111 1111。

计算得:
$NegMin=(-1)^S\times1.M\times2^e=+(1.11111111111111111111111)\times2^{127}=-3.402823e+38$
$NegMin=(-1)^S\times1.M\times2^e=+(1.111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111)\times2^{127}=-3.402823e+38$
$NegMin=(-1)S\times1.M\times2e=+(1.11111111111111111111111)\times2127=-3.402823e+38$

6.2 浮点数的精度

说到浮点数的精度，先给精度下一个定义。浮点数的精度是指浮点数的小数位所能表达的位数。

阶码的二进制位数决定浮点数的表示范围，尾数的二进制位数表示浮点数的精度。以 32 位浮点数为例，尾数域有 23 位。那么浮点数以二进制表示的话精度是 23 位，23 位所能表示的最大数是 $2^{23}-1=8388607$ $2^{23}-1=8388607$ $223-1=8388607$，所以十进制的尾数部分最大数值是 8388607，也就是说尾数数值超过这个值，float 将无法精确表示，所以 float 最多能表示小数点后 7 位，但绝对能保证的为 6 位，即 float 的十进制的精度为 6~7 位。

64 位双精度浮点数的尾数域 52 位，因 $2^{52}-1=4,503,599,627,370,495$ $2^{52}-1=4,503,599,627,370,495$ $252-1=4,503,599,627,370,495$，所以双精度浮点数的十进制的精度最高为 16 位，绝对保证的为 15 位，所以 double 的十进制的精度为 15~16 位。

本文操之过急，难免出现编辑错误和不当说法，请网友批评指正。不明之处，欢迎留言交流。对浮点数的加减乘除运算还未涉及，后续可能会去学习并记录学习所得，与大家分享。

---

[1] 百度百科.移码
[2] 百度知道.关于IEEE754标准浮点数阶码的移码
[3] 白中英.计算机组成原理第四版[M].科学出版社:P16-30
[4] 维基百科.浮点数